BAC 2007

Pro–Didactica

Testare Naţională

Rezolvările variantelor 51–55

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

Cuprins

CAPITOLUL 1

Varianta 51

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $6 + (2 \cdot 4 - 9) = 6 - 1 = \boxed{5}$
2. Numărul divizibil cu 2 este $\boxed{756}$.
3. $\dfrac{40}{100} \cdot 25 = \boxed{10}$.
4. Folosind relaţiile lui Viète avem: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{0}{1} = \boxed{0}$.
5. $m_a = \dfrac{4+6}{2} = \boxed{5}$.
6. Inălţimea triunghiului echilateral de latură a este egală cu $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, deci în cazul de faţă $\dfrac{10\sqrt{3}}{2} = \boxed{5\sqrt{2}}$.
7. $A_{lat} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 6 \cdot 10 = \boxed{60\pi}$.
8. Aria laterală este de 4 ori aria unei feţe laterale. Aria feţei laterale este egală cu muchia bazei (lăţimea) înmulţită cu muchia laterală (lungimea). Avem deci $A_{lat} = 4 \cdot 10 \cdot \text{muchia bazei}$, de unde muchia bazei este $\dfrac{200}{40} = \boxed{5}$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: $E(\sqrt{2}+1) + E(1-\sqrt{2}) = \dfrac{3-\sqrt{2}-1}{2} + \dfrac{3-1+\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{2} = \dfrac{4}{2} = \boxed{2}$.
10. $\boxed{B}$: Din $\dfrac{x+1}{1,4} = \dfrac{5}{7}$ avem $x + 1 = \dfrac{14}{10} \cdot \dfrac{5}{7}$. Deci $x = 1 - 1 = \boxed{0}$.
11. $\boxed{C}$: Din $AD = DB$ rezultă că triunghiul ADB este isoscel şi deci $\widehat{DAB} = \widehat{DBA} = 45°$. Astfel $\widehat{ADB} = 180° - (45° + 45°) = \boxed{90°}$.
12. $\boxed{D}$: $l_{cerc} = 2\pi r$, de unde $r = \dfrac{l_{cerc}}{2\pi} = \dfrac{36\pi}{2\pi} = \boxed{18}$ cm.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie n numărul copiilor din grup. Exprimând numărul de mere, ipoteza se transcrie în relaţia $3 + (n-1)5 = 4n + 11 \quad (1)$. Intr-adevăr, $3 + (n-1)5$ reprezintă faptul că un copil a primit 3 mere, iar restul de $(n-1)$ câte 5 mere, iar $4n + 11$ reprezintă faptul că toţi copii au primit 4 mere şi au mai rămas 11 mere. Ecuaţia (1) revine la $5n - 4n = 11 + 5 - 3$, de unde $n = \boxed{13}$.

    b. Numărul total de mere primite de copii este $3 + (n-1)5 = 3 + 12 \cdot 5 = \boxed{63}$.

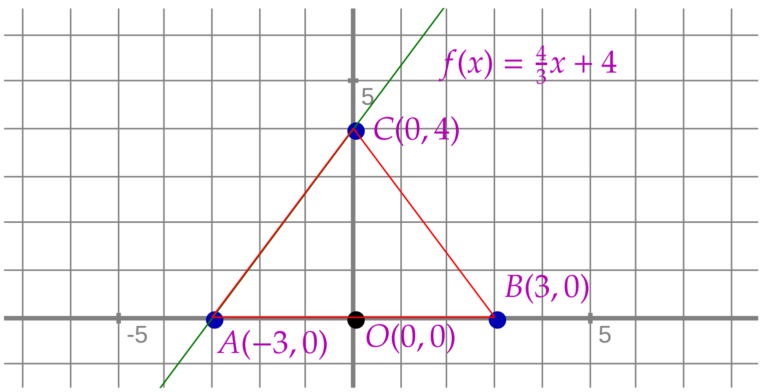

Figura 1. Exerciţiul 14.

14. a.

    b. Pentru a calcula perimetrul triunghiului ABC avem nevoie de lungimile laturilor triunghiului. Este evident că $AB = 6$. Cum triunghiul ABC este isocel (CO este şi înălţime şi mediană) este suficient sa aflăm lungimea lui BC. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul BOC avem $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Prin urmare perimetrul triunghiului ABC este $AB + BC + CA = 6 + 5 + 5 = \boxed{16}$.

    c. Din faptul că dreapta AC este reprezentarea grafică a funcţiei f, rezultă că $A(-3, 0)$ şi $C(0, 4)$ aparţin graficului funcţiei f, adică $f(-3) = 0$ şi $f(0) = 4$. Aceasta revine la $-3a + b = 0$ şi $b = 4$. Prin urmare $f(x) = \boxed{\frac{4}{3}x + 4}$.

15. a.

    b. Fie VO înălţimea piramidei. Volumul piramidei este dat de $V = \frac{1}{3}\text{Aria}_{ABCD} \cdot VO = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 12 = \boxed{400}$.

    c. Fie V_1 volumul piramidei mici, V_2 volumul trunchiului de piramidă obţinut, şi $A'B'C'D'$ planul paralel cu planul bazei. Notăm cu O' intersecţia diagonalelor în pătratul $A'B'C'D'$. Vom calcula distanţa VO' de la vârful V la planul $(A'B'C'D')$. Avem următoarea relaţie $V = V_1 + V_2 \quad (1)$. Din ipoteză $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{7}$ sau $V_2 = 7V_1$ şi înlocuind în relaţia (1) obţinem: $8V_1 =$

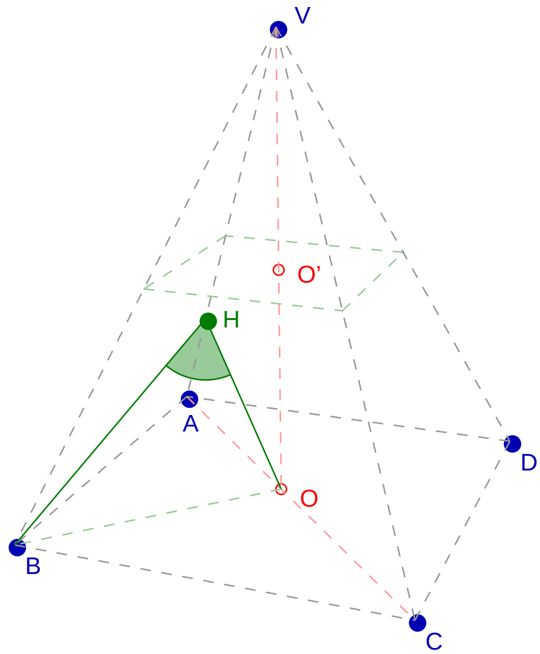

Figura 2. Exerciţiul 15.

V_{VABCD}, de unde $V_1 = \dfrac{V_{VABCD}}{8} = \dfrac{400}{8} = 50$. Cum $V_1 = \dfrac{1}{3}A_{A'B'C'D'} \cdot VO'$ deducem că $VO' = \dfrac{3V_1}{A_{A'B'C'D'}} = \dfrac{150}{A_{A'B'C'D'}}$ (2). Avem deci nevoie de $A_{A'B'C'D'}$. Folosind faptul că: $\dfrac{A_{A'B'C'D'}}{A_{ABCD}} = \dfrac{A'B'^2}{AB^2} = \dfrac{VO'^2}{VO^2} = \dfrac{VO'^2}{12^2}$ deducem $A_{A'B'C'D'} = A_{ABCD} \cdot \dfrac{VO'^2}{12^2} = \dfrac{100}{144}VO'^2 = \dfrac{25}{36}VO'^2$. Înlocuind în relaţia (2) avem: $VO' = \dfrac{3V_1}{A_{A'B'C'D'}} = \dfrac{150}{\frac{25}{36}VO'^2}$ ceea ce este echivalent cu $VO'^3 = \dfrac{150 \cdot 36}{25} = 6 \cdot 36 = 6^3$, deci $VO' = \boxed{6}$.

d. Cum $BO \perp VO$ şi $BO \perp AC$, rezultă că $BO \perp (VAC)$. Fie H piciorul pependicularei din O pe VA. Conform teoremei celor trei perpendiculare, $BH \perp VA$. Unghiul dintre planele (VAC) şi (VAB) este $\widehat{BHO}$. In triunghiul dreptunghic VOA, conform teoremei lui Pitagora avem $VA = \sqrt{VO^2 + AO^2} = \sqrt{12^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{194}$. Atunci din acelaşi triunghi dreptunghic deducem $OH = \dfrac{VO \cdot AO}{VA} = \dfrac{12 \cdot 5\sqrt{2}}{\sqrt{194}}$.

In triunghiul dreptunghic BOH, avem $\operatorname{tg}\widehat{BHO} = \dfrac{BO}{OH} = \dfrac{5\sqrt{2}}{\dfrac{12 \cdot 5\sqrt{2}}{\sqrt{194}}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{194}}{12}}$.

CAPITOLUL 2

Varianta 52

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $7 - 2 \cdot 3 = \boxed{1}$
2. $\frac{3}{5} = \boxed{0,6}$
3. Cel mai mare număr natural din $(-3, 8)$ este $\boxed{7}$.
4. Media geometrică a numerelor 3 şi 12 este $\sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = \boxed{6}$.
5. $A \cap B = \boxed{\{5\}}$
6. Raza cercului circumscris triunghiului este jumătate din lungimea ipotenuzei triunghiului, deci $\boxed{9}$.
7. Aria laterală pentru o prismă dreaptă este perimetrul înmulţit cu înălţimea. Cum perimetrul bazei este $3 \cdot 10 = 30$, înălţimea va fi $\frac{360}{30} = \boxed{12}$.
8. $V_{\text{sferă}} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 9^3}{3} = \boxed{972}\pi\,\text{cm}^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{C}$: În mulţimea A de 6 elemente, există două numerele iraţionale, anume $\sqrt{3}$ şi $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Deci probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr din A, acesta să fie iraţional este egală cu $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
10. $\boxed{D}$: Ecuaţia se rescrie $3x^2 = 7 - 1$ sau $x^2 = \frac{6}{3} = 2$. Soluţiile ecuaţiei sunt: $x_1 = \sqrt{2}$ şi $x_2 = -\sqrt{2}$.
11. $\boxed{B}$: Din $DE || BC$ rezultă că $\widehat{BDE} = \widehat{CBD}$ (alterne interne). Pe de altă parte $\widehat{CBD} = \widehat{DBE}$, căci BD este bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$. Atunci $\widehat{BDE} = \widehat{DBE}$, deci triunghiul BED este isocel, iar $BE = ED = 8$ cm.
12. $\boxed{C}$: Cum perimetrul pătratului este 64, latura pătratului este egală cu $\frac{64}{4} = 16$ cm. Deci diagonala pătratului este: $16\sqrt{2}$ cm.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Fie a şi b cele două numere, cu $a > b$. Ipotezele pot fi scrise sub forma ecuaţiilor $a + b = 48$ şi $a = 3b + 4$. Substituind pe a din a doua ecuaţie în prima, avem: $3b+4+b = 48$, de unde $b = \frac{44}{4} = \boxed{11}$, iar $a = 3\cdot 11+4 = \boxed{37}$.

b. Avem $a + b = 48 \quad (1)$ şi cum cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b este 6, $a = 6p$, $b = 6q$ cu p, q prime între ele şi $p > q$. Înlocuind în relaţia (1) obţinem: $6p + 6q = 48$ sau $p + q = 8$. Cum p, q sunt prime între ele, singurele posibilităţi sunt $(p, q) \in \{(7, 1), (5, 3)\}$, căci în celelalte cazuri p şi q are fi ambele divizibile cu 2. Pentru $p = 7$, $q = 1$ obţinem $\boxed{a = 42}$, $\boxed{b = 6}$, iar pentru $p = 5$, $q = 3$ avem $\boxed{a = 30}$, $\boxed{b = 18}$.

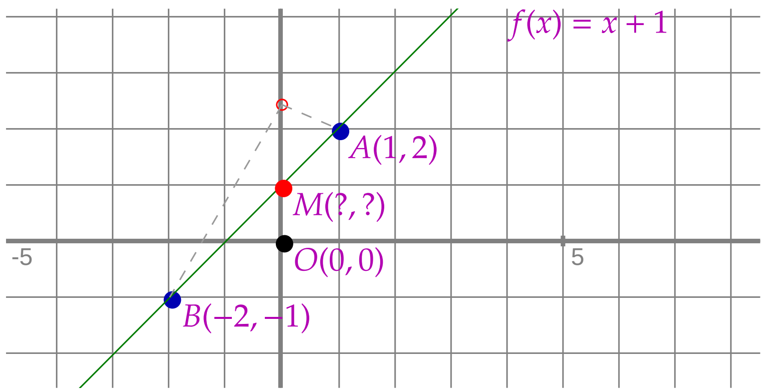

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

14. a.

b. Folosind formula $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, avem

$$\begin{aligned} N &= 2007 + 2\left[f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(2005)\right] \\ &= 2007 + 2\left[(0+1) + (1+1) + (2+1) + ... + (2005+1)\right] \\ &= 2007 + 2\left[1 + 2 + ... + 2006\right] \\ &= 2007 + 2\left[\frac{2006 \cdot 2007}{2}\right] = 2007 + 2006 \cdot 2007 \\ &= 2007(1 + 2006) = 2007^2 \end{aligned}$$

pătrat perfect.

c. Deoarece $f(1) = 2$ şi $f(-2) = -1$, punctele $A(1, 2)$ şi $B(-2, -1)$ aparţin graficului funcţiei f. Căutăm $M(0, a)$ astfel încât $MA + MB$ să fie minimă. Folosind inegalitatea triunghiului se vede că pentru ca $MA + MB$ să fie minimă trebuie ca punctul M să aparţină segmentului AB. Intr-adevăr dacă M se află pe segmentul AB atunci $MA + MB = AB$. Dacă M nu este pe AB, atunci în triunghiul AMB din inegalitatea triunghiului avem $MA + MB > AB$. Aşadar, M este intersecţia dintre graficul funcţiei f şi axa Oy. Din $f(0) = a$ obţinem $a = 1$. Punctul căutat este $\boxed{M(0, 1)}$.

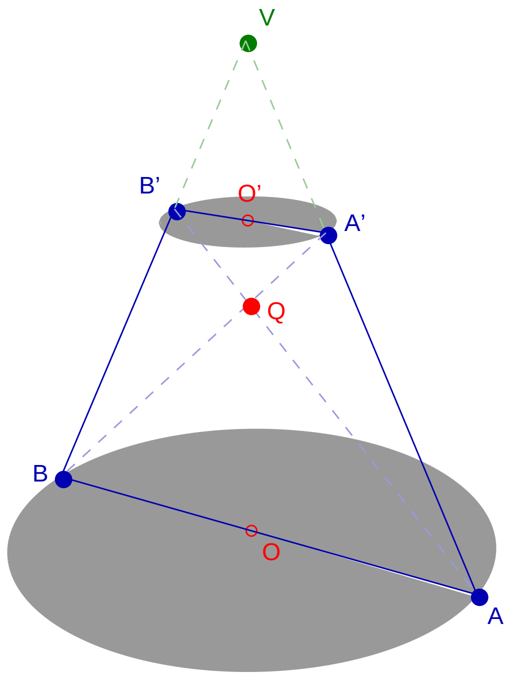

FIGURA 2. Exercițiul 15.

15. a.

b. Fie Q intersecţia diagonalelor trapezului $ABB'A'$, iar O şi O' şi O' centrele cercurilor de bază. Evident OO' este înălţimea trunchiului de con. Triunghiurile $A'QB'$ şi AQB sunt dreptunghice isoscele, deci $\widehat{QA'B'} = \widehat{QB'A'} = \widehat{QAB} = \widehat{QBA} = 45°$. În triunghiul $A'O'Q$ avem: $\cos\widehat{QA'O'} = \dfrac{A'O'}{A'Q}$ sau $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{A'Q}$, de unde $A'Q = 3\sqrt{2}$. Similar, în triunghiul AOQ avem: $\cos\widehat{QAO} = \dfrac{AO}{AQ}$ sau $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{9}{AQ}$, de unde $AQ = 9\sqrt{2}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic AQA' determinăm generatoarea trunchiului de con:

$$\begin{aligned} AA' &= \sqrt{AQ^2 + A'Q^2} = \sqrt{(9\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{81 \cdot 2 + 9 \cdot 2} = \sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = \boxed{6\sqrt{5}} \end{aligned}$$

c. $\mathcal{A}_{BQB'} = \mathcal{A}_{AQA'} = \dfrac{A'Q \cdot AQ}{2} = \dfrac{3\sqrt{2} \cdot 9\sqrt{2}}{2} = \boxed{27}$.

d. Fie $V = AA' \cap BB'$. Cum $A'B' \| AB$ triunghiurile VAB şi $VA'B'$ sunt asemenea, de unde $\dfrac{VA'}{VA} = \dfrac{A'O'}{AO}$. Aplicând proporţii derivate avem: $\dfrac{VA'}{VA - VA'} = \dfrac{A'O'}{AO - A'O'}$ sau $\dfrac{VA'}{AA'} = \dfrac{A'O'}{AO - A'O'}$, de unde $VA' = \dfrac{AA' \cdot A'O'}{AO - A'O'} = \dfrac{6\sqrt{5} \cdot 3}{9 - 3} = 3\sqrt{5}$. Atunci $VA = VA' + AA' = 9\sqrt{5}$.

În triunghiul dreptunghic VAO aplicăm teorema lui Pitagora: $VO = \sqrt{VA^2 - AO^2} = \sqrt{(9\sqrt{5})^2 - 9^2} = \sqrt{9^2 \cdot 4} = 18$. Calculând aria triunghiului AVB în două moduri avem relaţia: $\frac{VO \cdot AB}{2} = \frac{VA \cdot VB \cdot \sin\widehat{AVB}}{2}$ sau $18 \cdot 18 = 9\sqrt{5} \cdot 9\sqrt{5} \cdot \sin\widehat{AVB}$, de unde $\sin\widehat{AVB} = \frac{18^2}{(9\sqrt{5})^2} = \boxed{\frac{4}{5}}$.

CAPITOLUL 3

Varianta 53

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $15 - (2 + 3) = 15 - 5 = \boxed{10}$.
2. Soluţia ecuaţiei $x - 6 = 8$ este $x = 8 + 6 = \boxed{14}$.
3. Mai mare este numărul $\boxed{a = \frac{7}{2}}$.
4. Cel mai mic număr natural diferit de zero care se împarte exact la 5 şi la 2 este $\boxed{10}$.
5. $2\,\text{kg} = 2000\,\text{g}$.
6. Aria discului este $\pi r^2 = \boxed{100}\pi$.
7. Fie a muchia cubului. Ştiind că $V_{cub} = a^3$, avem $27 = a^3$, de unde $a = \boxed{3}\,\text{cm}$.
8. $A_l = \pi r g = \pi \cdot 5 \cdot 15 = \boxed{75}\pi\,\text{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{D}$: Din a doua ecuaţie a sistemului avem $y = 8 - 2x$ şi înlocuind în prima ecuaţie obţinem: $5x - 24 + 6x = 9$, de unde $x = \frac{33}{11} = 3$. Substituind în a doua ecuaţie obţinem şi $y = 8 - 6 = 2$. Deci soluţia sistemului este $(3, 2)$.
10. $\boxed{C}$: Numărul submulţimilor unei muţimi cu n elemente este 2^n. Deci numărul submulţimilor lui $A = \{2, 3, 4\}$ este $2^3 = 8$.
11. $\boxed{B}$: Triunghiurile AMB şi ABC au aceeaşi înălţime, iar baza triunghiului AMB este jumătate din lungimea bazei triunghiului ABC, deci $A_{AMB} = \frac{A_{ABC}}{2} = \frac{24}{2} = 12\,\text{cm}^2$.
12. $\boxed{B}$: Ştiind că aria pătratului este 81, deducem latura pătratului egală cu $\sqrt{81} = 9$. Deci perimetrul pătratului este $4 \cdot 9 = 36$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Din faptul că x este 60% din y, avem $x = \frac{60}{100}y$ sau $x = \frac{3}{5}y$ sau $5x = 3y$, ceea ce demonstrează faptul că x şi y sunt invers proporţionale cu numerele 5 şi 3.

b. Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 5x & = & 3y \\ 2x + 5y & = & 310 \end{cases}$$

Din prima ecuaţie avem $x = \frac{3y}{5}$ şi înlocuind în a doua ecuaţie deducem $2\frac{3y}{5} + 5y = 310$ sau $6y + 25y = 1550$, de unde $y = \frac{1550}{31} = 50$, iar $x = \frac{3 \cdot 50}{5} = 30$. Cele două numere sunt deci $\boxed{x = 30, y = 50}$.

14. a. $E(1) = 1 - 2 + 2 - 2 + 1 = \boxed{0}$.

b. $N = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2 \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

c. Avem

$$\begin{aligned} E(n) &= n^4 - 2n^3 + 2n^2 - 2n + 1 \\ &= [(n^2)^2 + 2n^2 + 1] - 2n(n^2 + 1) \\ &= (n^2 + 1)^2 - 2n(n^2 + 1) \\ &= (n^2 + 1)(n^2 + 1 - 2n) = (n^2 + 1)(n - 1)^2 \end{aligned}$$

şi $n^3 + n - n^2 - 1 = n(n^2 + 1) - (n^2 + 1) = (n^2 + 1)(n - 1)$. Deci: $\frac{E(n)}{n^3 + n - n^2 - 1} = \frac{(n^2+1)(n-1)^2}{(n^2+1)(n-1)} = n - 1 \in \mathbb{N}, \forall n > 1$.

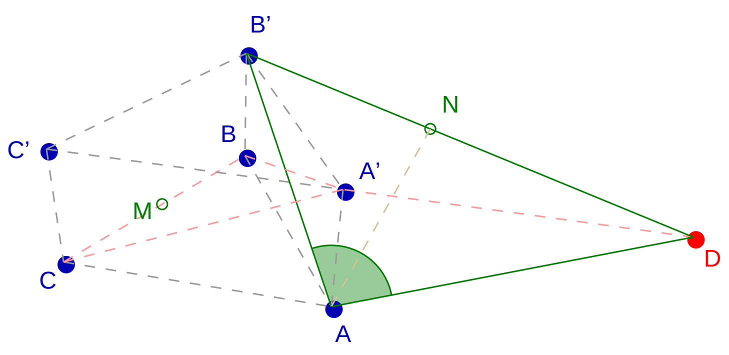

Figura 1. Exerciţiul 15.

15. a.

b. $A_t = 3A_{AA'B'B} + 2A_{ABC} = 3\cdot AB\cdot AA' + 2\dfrac{AB\cdot AB\sin 60^\circ}{2} = 3\cdot 24\cdot 12 + 24\cdot 24\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{864 + 288\sqrt{3}}$.

c. Fie P piciorul perpendicularei din A pe planul $(A'BC)$, deci AP este distanţa de la A la planul $(A'BC)$. Calculăm volumul piramidei $A'ABC$ în două moduri. Pe de o parte $V_{AA'BC} = \dfrac{1}{3}AP\cdot A_{A'BC}$, iar pe de alta $V_{AA'BC} = \dfrac{1}{3}AA'\cdot A_{ABC}$. Avem deci $AP\cdot A_{A'BC} = AA'\cdot A_{ABC}$, de unde $AP = \dfrac{AA'\cdot A_{ABC}}{A_{A'BC}}$.
Am văzut deja la punctul (a) că $A_{ABC} = \dfrac{24\cdot 24\cdot\sin 60^\circ}{2} = 144\sqrt{3}$. Calculăm acum $A_{A'BC}$. Fie $A'M\perp BC$. Cum triunghiul $A'BC$ este isoscel M este mijlocul lui BC şi deci $AM\perp BC$. AM este înălţime in triunghiul echilateral ABC şi este egală cu $\dfrac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$. În triunghiul dreptunghic $A'AM$ aplicăm teorema lui Pitagora: $A'M = \sqrt{AA'^2 + AM^2} = \sqrt{12^2 + (12\sqrt{3})^2} = \sqrt{12^2(3+1)} = 12\cdot 2 = 24$. Deci, $A_{A'BC} = \dfrac{A'M\cdot BC}{2} = \dfrac{24\cdot 24}{2} = 288$. În final: $AP = \dfrac{AA'\cdot A_{ABC}}{A_{A'BC}} = \dfrac{12\cdot 144\sqrt{3}}{288} = \boxed{6\sqrt{3}}$.

d. Fie D simetricul lui C' faţă de A'. Cum $A'D \| AC$ şi $A'D = AC$, patrulaterul $ACA'D$ este paralelogram şi $AD \| A'C$. Atunci unghiul dintre AB' şi $A'C$ este egal cu $\widehat{DAB'}$.
Triunghiul DAB' este isoscel deoarece $AB' = A'C = DA = \sqrt{24^2 + 12^2} = 12\sqrt{5}$. Cum $A'D = A'B' = A'C'$, punctele D, B', C' sunt pe un cerc de centru A'. Dar AC' este diametru în acest cerc, deci unghiul $DB'C'$ este unghi drept. Aplicând acum teorema lui Pitagora în triunghiul $DB'C'$, avem $DB' = \sqrt{DC'^2 - B'C'^2} = \sqrt{48^2 - 24^2} = 24\sqrt{3}$.
Fie M mijlocul segmentului DB'. Triunghiul DAB' fiind isoscel, AM este şi înălţime. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul DAM, avem
$AM = \sqrt{DA^2 - DM^2} = \sqrt{(12\sqrt{5})^2 - (12\sqrt{3})^2} = 12\sqrt{2}$
Calculând aria triunghiului DAB' în două moduri, avem

$$\frac{DB'\cdot AM}{2} = \frac{DA\cdot AB'\cdot\sin\widehat{DAB'}}{2}$$

De aici $\sin\widehat{ADB'} = \dfrac{DB'\cdot AM}{DA\cdot AB'} = \dfrac{24\sqrt{3}\cdot 12\sqrt{2}}{12\sqrt{5}\cdot 12\sqrt{5}} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{6}}{5}}$.

CAPITOLUL 4

Varianta 54

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 6 + 12 = \boxed{18}$.
2. Cel mai mare divizor comun al numerelor $20 = 4 \cdot 5$ şi $24 = 4 \cdot 6$ este $\boxed{4}$.
3. Soluţia ecuaţiei $x + 7 = 0$ este $\boxed{x = -7}$.
4. $10\,\text{kg} = \boxed{10.000}\,\text{g}$
5. Perimetrul triunghiului dat este $3 \cdot 7 = \boxed{21}\,\text{cm}$.
6. Lungimea apotemei pătratului este $\frac{10}{2} = \boxed{5}\,\text{cm}$.
7. $V_{cub} = 5^3 = \boxed{125}\,\text{cm}^3$.
8. $A_l = \pi r g = \pi \cdot 4 \cdot 6 = \boxed{24}\pi\,\text{cm}^2$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{A}$: Din ipoteză avem $x = 3y$ şi $y = \frac{z}{6}$, de unde $\frac{x}{z} = \frac{3y}{6y} = \frac{1}{2} = 0,5$.
10. $\boxed{D}$: Relaţia $x^2 - 4x + 3 = (x + a)(x + b)$ este echivalentă cu $x^2 - 4x + 3 = x^2 + bx + ax + ab$ sau $x^2 - 4x + 3 = x^2 + (a + b)x + ab$. Identificând coeficienţii, $a + b = -4$.
11. $\boxed{D}$: $\sqrt{2}\sin 45^\circ + \sqrt{3} \cdot \text{tg}\, 60^\circ = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 1 + 3 = 4$.
12. $\boxed{B}$: Distanţa de la orice punct de pe CD la AB este aceeasi şi este egală cu latura pătratului. Deci $A_{AMB} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Cum a şi b sunt direct proporţionale cu 4 şi respectiv 2 avem $\frac{a}{4} = \frac{b}{2}$ sau $\frac{a}{2} = b$. Deducem ca b este $\boxed{50\%}$ din a.

b. Avem relaţiile $a = 2b$ şi $\frac{a+b}{2} = 24$. Înlocuind a în relaţia a doua avem $\frac{2b+b}{2} = 24$ sau $\frac{3b}{2} = 24$, de unde $b = \frac{2 \cdot 24}{3} = \boxed{16}$, iar $a = 2 \cdot 16 = \boxed{32}$.

14. a. $f(-3) \cdot f(-7) = (-3+2)(-7+2) = (-1)(-5) = \boxed{5}$.

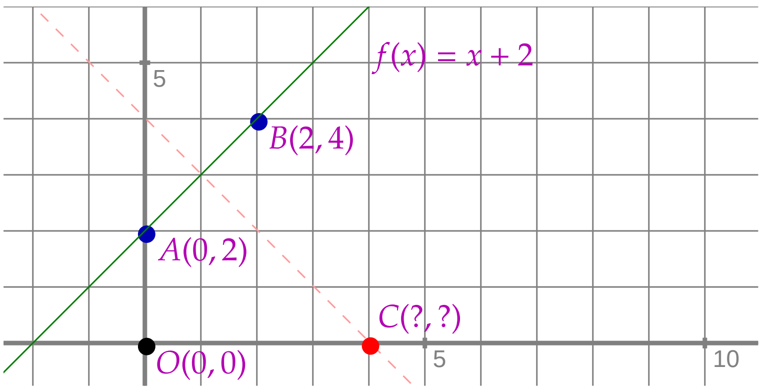

Figura 1. Exerciţiul 14.

b.

c. Fie $C(a, 0)$ şi $BB' \perp Ox$. În triunghiul dreptunghic AOC aplicând teorema lui Pitagora obţinem:$AC^2 = AO^2 + OC^2 = 2^2 + a^2$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $BB'C$ avem: $BC^2 = BB'^2 + B'C^2 = 4^2 + (a-2)^2$. Cum vrem $AC = BC$ deducem relaţia: $2^2 + a^2 = 4^2 + (a-2)^2$ sau $4 + a^2 = 16 + a^2 - 4a + 4$, de unde $4a = 16$ sau $a = 4$. Punctul căutat este $\boxed{C(4, 0)}$.

15. a.

b. Triunghiurile dreptunghice VOM şi ABM sunt congruente, cazul catetă-catetă. Intr-adevăr $VO = AB$ şi $OM = MB$ ambele fiind jumătate dinn latura pătratului. Deci $VM = AM$, de unde rezultă că triunghiul VMA este isoscel.

c. Fie a lugimea laturii pătratului $ABCD$. In triunghiul dreptunghic VOM avem $VM^2 = VO^2 + OM^2$, sau $a^2 + \frac{a^2}{4} = (4\sqrt{5})^2$. De aici $\frac{5a^2}{4} = 80$, ceea ce conduce la $a^2 = 64$, deci $a = 8$. Prin urmare volumul piramidei este $\frac{1}{3} A_{ABCD} \cdot VO = \frac{1}{3} 8^2 \cdot 8 = \boxed{\frac{512}{3}}$.

d. Fie h distanţa de la A la planul (VBC).
Piramida $VABC$ are volumul jumătate din volumul piramidei originale, adică $\frac{256}{3}$. Putem privi acest tetraedru având baza VBC şi atunci volumul este dat de $\frac{1}{3} A_{VBC} \cdot h$. Dar $A_{VBC} = \frac{VM \cdot BC}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 8}{2} = 16\sqrt{5}$. Astfel $\frac{256}{3} = \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{5} \cdot h$, de unde $h = \frac{256}{16\sqrt{5}} = \boxed{\frac{16\sqrt{5}}{5}}$.

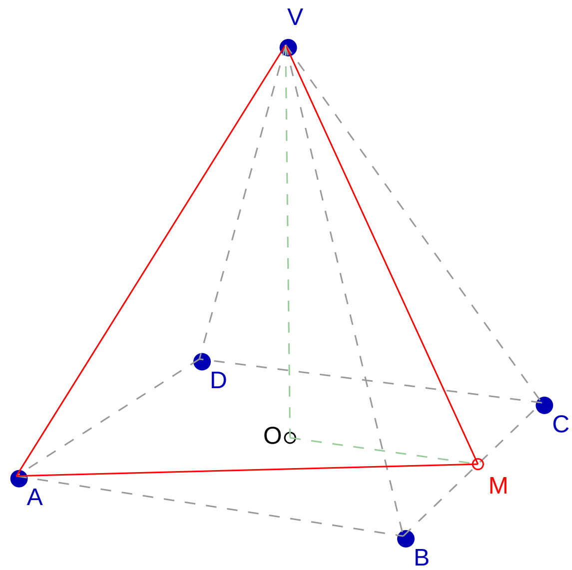

FIGURA 2. Exercițiul 15.

CAPITOLUL 5

Varianta 55

1. Subiectul I.

Rezolvare.

1. $5 + 3 \cdot 8 = \boxed{29}$.
2. $\frac{15}{8} : 3 = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{8}}$.
3. Cum $1\,\mathrm{ml} = 0,001\,\mathrm{l}$, rezultă $750\,\mathrm{ml} = \boxed{0,75}\,\mathrm{l}$.
4. $\frac{20}{100} \cdot 800 = \boxed{160}$.
5. $\widehat{ACB} = 90^\circ - 37^\circ = \boxed{53^\circ}$.
6. $d(D, AB) = d(C, AB) = \boxed{5}\,\mathrm{cm}$.
7. $A_t = \pi r(r + G) = \pi 3(3 + 7) = \boxed{30}\,\pi\,\mathrm{cm}^2$.
8. $V = A_{bazei} \cdot h = \frac{4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ}{2} \cdot 4 = \frac{32\sqrt{3}}{2} = \boxed{16\sqrt{3}}\,\mathrm{cm}^3$.

2. Subiectul II.

Rezolvare.

9. $\boxed{B}$: $\frac{3}{8}$ este soluţia ecuaţiei $10x - 3 = 2x$. Într-adevăr, ecuaţia este echivalentă cu $10x - 2x = 3$ sau $8x = 3$, de unde $x = \frac{3}{8}$.
10. $\boxed{D}$: Pentru ca mulţimea A să fie egală cu mulţimea B trebuie ca: $m - 2 = 3$ şi $m + 1 = 6$. Aceasta revine la $m = 5$.
11. $\boxed{D}$: Raza cercului circumscris unui hexagon regulat este egală cu latura hexagonului. Deci perimetrul hexagonului este egal cu $6 \cdot 8 = 48\,\mathrm{cm}$.
12. $\boxed{C}$: Fie a lungimea laturii primului pătrat. Noul pătrat are lungimea laturii $2a$, deci are aria $(2a)^2 = 4a^2 = 4 \cdot 15 = 60\,\mathrm{cm}^2$.

3. Subiectul III.

Rezolvare.

13. a. Media clasei este:

$$\frac{2 \cdot 10 + 3 \cdot 9 + 6 \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4}{2 + 3 + 6 + 6 + 5 + 1 + 2} = \frac{180}{25} = \boxed{7,2}$$

b. Fie s suma notelor ce trebuiesc luate de elevii ce au nota 4. Vrem ca: $\dfrac{2\cdot 10+3\cdot 9+6\cdot 8+6\cdot 7+5\cdot 6+1\cdot 5+s}{2+3+6+6+5+1+2} = \dfrac{172+s}{25} > 7,6$. Aceasta revine la $172+s > 190$ sau $s > 18$. Cum notele elevilor pot fi cel mult 10, deducem că elevii trebuie sa ia, fie $\boxed{\text{unul nota 9 şi celălalt nota 10}}$, fie $\boxed{\text{amândoi nota 10}}$.

14. a. $f(23)+f(24) = ((-1)^{23}+23)+\left((-1)^{24}+24\right) = -1+23+1+24 = \boxed{47}$.

b. Suma are 36 de termeni. In această sumă fiecare termen conţine o parte de genul $(-1)^*$. Cum avem 18 exponenţii pari şi 18 exponenţi impari, suma acestor puteri ale lui (-1) va fi zero. Avem deci

$$\begin{aligned}
s &= f(13)+f(14)+\ldots+f(48)\\
&= \left((-1)^{13}+13\right)+\left((-1)^{14}+14\right)+\left((-1)^{48}+48\right)\\
&= (-1)^{13}+(-1)^{14}+\ldots+(-1)^{47}+(-1)^{48}\\
&\quad +(13+14+\ldots+47+48)\\
&= 0+(1+2+\ldots+47+48)-(1+2+...+11+12)\\
&= \frac{48\cdot 49}{2}-\frac{12\cdot 13}{2} = 1176-78 = \boxed{1098}
\end{aligned}$$

c. Graficul funcţiei g conţine doar 3 puncte şi anume: $A(0,g(0))$, $B(1,g(1))$ şi $C(2,g(2))$, sau $A(0,1)$, $B(1,0)$ şi $C(2,3)$.

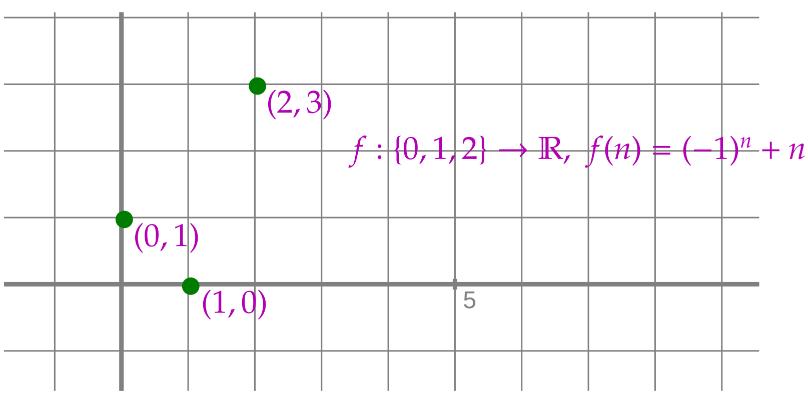

FIGURA 1. Exerciţiul 14.

15. a.

b. Proiecţia O a lui V pe planul (ABC) este centrul de greutate al triunghiului ABC. Fie D proiecţia lui B pe AC. Avem $O\in BD$ şi $BO = \frac{2}{3}BD$. BD este înălţime în triunghiul echilateral ABC, deci are lungimea $\dfrac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$. Prin urmare $BO = \dfrac{2}{3}\cdot 12\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$. În triunghiul dreptunghic VOB aplicăm teorema lui Pitagora: $VO = \sqrt{VB^2-BO^2} = \sqrt{(12\sqrt{5})^2-(8\sqrt{3})^2} =$

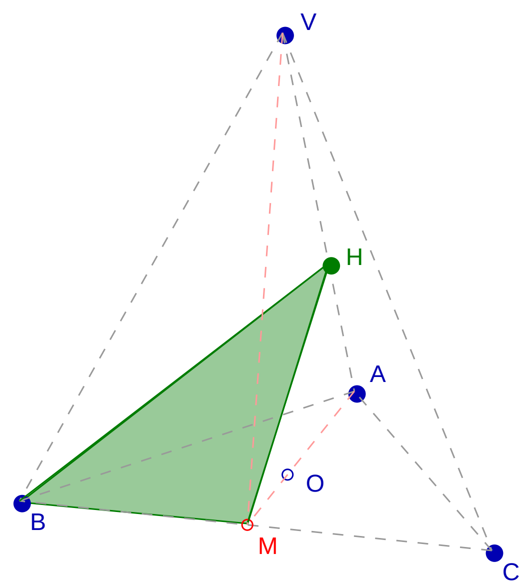

FIGURA 2. Exercițiul 15.

$\sqrt{144 \cdot 5 - 64 \cdot 3} = \sqrt{720 - 192} = \sqrt{528} = 4\sqrt{33}$. Atunci volumul piramidei este

$$V_{VABC} = \frac{\text{Aria}_{ABC} \cdot VO}{3} = \frac{\dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ}{2} \cdot 4\sqrt{33}}{3} = \frac{24^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{33}}{12} = 24^2\sqrt{11} = \boxed{576\sqrt{11}}$$

c. Fie $d = d(M, AV)$. Avem $A_{AVM} = \dfrac{AM \cdot VO}{2}$ considerând drept bază AM, sau $A_{AVM} = \dfrac{AV \cdot d}{2}$ considerând ca bază AV. Egalând cele două arii obținem: $\dfrac{AM \cdot VO}{2} = \dfrac{AV \cdot d}{2}$, sau $\dfrac{12\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{33}}{2} = \dfrac{12\sqrt{5} \cdot d}{2}$, de unde $d = \dfrac{48\sqrt{3} \cdot \sqrt{33}}{12\sqrt{5}} = \dfrac{12\sqrt{11}}{\sqrt{5}} = \boxed{\dfrac{12\sqrt{55}}{5}}$.

d. Cum $BM \perp AM$ și $BM \perp VM$, rezultă că BM este perpendiculară pe planul (VAM). Fie H piciorul perpendicularei din M pe VA. Conform teoremei celor trei perpendiculare, $BH \perp VA$. Unghiul dintre planele (VAM) și (VAB) este $\widehat{BHM}$. In triunghiul dreptunghic BHM, avem $\text{tg}\,\widehat{BHM} = \dfrac{BM}{MH} = \dfrac{12}{\dfrac{12\sqrt{55}}{5}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{55}}{11}}$.